

Varianta 23

Subiectul I

- a) Dacă punctul M este mijlocul segmentului $[AB]$ atunci $M(2, -1)$.
- b) $\operatorname{Re}(z) = 0$.
- c) $\bar{z} = -3 + 4i$.
- d) $\cos \frac{\pi}{2} \cdot \cos \frac{\pi}{4} = 0$.
- e) Mediana este CM , $CM = 2\sqrt{5}$.
- f) $E(0, 1)$.

Subiectul II

1.

- a) $a_6 = 12$.
- b) $x_1 = 0, x_2 = -1$.
- c) Avem $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ posibilități.
- d) $f(f(1)) = f(1) = 1$.
- e) $f(i) = -1$.

2.

- a) $f'(x) = \frac{1-x}{x}, x > 0$.
- b) $A(1, -1)$ este punctul de extrem local al graficului funcției f .
- c) $f'(x) < 0, \forall x \in (1, \infty)$, deci f este strict descrescătoare pe $(1, \infty)$.
- d) $x = 0$ este asimptotă verticală la graficul funcției f .
- e) $\lim_{n \rightarrow \infty} f'(n) = -1$.

Subiectul III

- a) $(x+2)(y+2) - 2 = xy + 2x + 2y + 2 = x \circ y, \forall x, y \in \mathbf{R}$.
- b) Din $x \in G, y \in G$ rezultă $x+2 > 0, y+2 > 0$ deci $(x+2)(y+2) > 0$ atunci $(x+2)(y+2) - 2 > -2$ adică $x \circ y > -2 \Rightarrow x \circ y \in G$.
- c) Prin calcul se arată că $(x \circ y) \circ z = xyz + 2xy + 2xz + 2yz + 4x + 4y + 4z + 6 = x \circ (y \circ z)$.
- d) $x \circ e = x, \forall x \in (-2, \infty) \Leftrightarrow x(e+2) + 2e + 2 = x, \forall x \in (-2, \infty)$. Identificând coeficienții obținem $e+2=1$ și $2e+2=0 \Rightarrow e=-1 \in G$. Se verifică că $-1 \circ x = x, \forall x \in G$.
- e) $(2x+4)(0+2) - 2 = 0; 4x+6=0 \Rightarrow x = -\frac{3}{2} \in G$.

f) Notăm $P(n): \underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_{n \text{ ori}} = (x+2)^n - 2, n \in \mathbf{N}^*$.

$P(1)$ este adevărată. Presupunem $P(k)$ ca fiind o propoziție adevărată, demonstrăm că $P(k+1)$ este adevărată.

Din $\underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_{k+1 \text{ ori}} = \left(\underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_{n \text{ ori}} \right) \circ x = ((x+2)^k - 2) \circ x =$
 $= ((x+2)^k - 2 + 2)(x+2) - 2 = (x+2)^{k+1} - 2 \Rightarrow P(k+1)$ este propoziție adevărată. Pe baza metodei inducției matematice rezultă că $P(n)$ este adevărată, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

g) Din f) pentru $n = 2007$ și $x = 0$ obținem $\underbrace{0 \circ 0 \circ \dots \circ 0}_{2007 \text{ ori}} = 2^{2007} - 2$.

Subiectul IV

a) $f(x) = \frac{1}{e^x} - \frac{1}{e^{x+1}}.$

b) $y = 0$ este ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f .

c) $f'(x) = -\frac{e-1}{e^{x+1}} = -f(x), \forall x \in \mathbf{R}.$

d) $a_n = \sum_{k=1}^n f(x) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{e^k} - \frac{1}{e^{k+1}} \right) =$
 $= \left(\frac{1}{e} + \frac{1}{e^2} + \dots + \frac{1}{e^n} \right) - \left(\frac{1}{e^2} + \frac{1}{e^3} + \dots + \frac{1}{e^n} + \frac{1}{e^{n+1}} \right) = \frac{1}{e} \left(1 - \frac{1}{e^n} \right).$

e) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e} \left(1 - \frac{1}{e^n} \right) = \frac{1}{e}.$

f) $S_f = \int_0^1 \frac{e-1}{e^{x+1}} dx = \frac{e-1}{e} \cdot \int_0^1 e^{-x} dx = \left(\frac{e-1}{e} \right)^2.$

g) $\int_0^n f(x) dx = \frac{e-1}{e} \int_0^n e^{-x} dx = \frac{e-1}{e} \cdot \frac{e^n - 1}{e^n}.$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_0^n f(x) dx + a_n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{e-1}{e} \cdot \frac{e^n - 1}{e^n} + \frac{1}{e} \cdot \frac{e^n - 1}{e^n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^n - 1}{e^n} = 1.$